А. В. Гарбарук, Д. Р. Магидов

Новый подход к анализу влияния внешних воздействий на устойчивость внешних течений

Аннотация. На основе линейного анализа устойчивости численных стационарных решений уравнений Рейнольдса исследуется влияние малых внешних воздействий конечной амплитуды. Для тестирования подхода рассмотрена задача о рестабилизации ламинарного течения вокруг круглого цилиндра.

Введение. Известным подходом к определению условий перехода течения к нестационарному режиму и возникновения автоколебаний является линейный анализ устойчивости стационарного решения, то есть решение дифференциальных уравнений для возмущений. В рамках этого подхода осуществляется поиск собственных чисел и собственных векторов дифференциального оператора системы уравнений для возмущений. При наличии неустойчивых собственных колебаний появляется возможность перехода течения к нестационарному режиму.

Кроме того, если дополнительно решить сопряженную задачу на собственные значения, становится возможной оценка влияния малых внешних воздействий конечной амплитуды на собственные колебания.

В данной работе исследование влияния внешних воздействий осуществляется на основе численного решения линеаризованных уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа, что позволяет рассматривать как ламинарные, так и турбулентные течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Рейнольдса в следующей однородной форме:

$$R(U)\frac{\partial U}{\partial t} + N(U) = 0. \tag{1}$$

Тогда, если U_0 является стационарным решением (1), то верно, что

$$N(U_0) = 0. \tag{2}$$

Введем следующие линейные операторы:

$$\begin{aligned} &W = W(U) = \frac{\partial R}{\partial U}; \quad M = M(U) = \frac{\partial N}{\partial U}; \\ &L = L(U) = W^{-1}M \end{aligned}. \tag{3}$$

Тогда линеаризованная система уравнений Рейнольдса для возмущений имеет следующий вид:

$$L_0 u_0 - \lambda_0 u_0 = 0, \tag{4}$$

где $L_0 = L(U_0)$, а u_0 и λ_0 – комплексные собственный вектор и собственное число линейного оператора L_0. Следует отметить, что неустойчивым собственным колебаниям соответствуют собственные числа с отрицательной вещественной частью ($\mathrm{Re}(\lambda_0) < 0$).

Далее, введем объемную силу F, зависящую от U, в правую часть системы уравнений Рейнольдса (1)

$$R(U)\frac{\partial U}{\partial t} + N(U) = F \tag{5}$$

и представим объемную силу в виде суммы стационарной и нестационарной компонент:

$$F = F_s + F_u\,. \tag{6}$$

Тогда стационарное решение уравнения (5), U_1, должно удовлетворять следующему соотношению:

$$N(U_1) = F_s\,. \tag{7}$$

Новое, вынужденное стационарное решение может быть представлено как:

$$U_1 = U_0 + U' \tag{8}$$

Далее, следуя подходу Хилла [1], допустим, что объемная сила F достаточно мала. Тогда, исключая слагаемые второго порядка, получаем:

$$\begin{aligned} N(U_1) &\equiv N(U_0 + U') = \\ &= N(U_0) + \left(\left.\frac{\partial N}{\partial U}\right|_{U=U_0} \right) U' + O\left(U'^2\right) \approx \\ &\approx N(U_0) + \left(\left.\frac{\partial N}{\partial U}\right|_{U=U_0} \right) U' = N(U_0) + M(U_0)\cdot U' \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим модифицированную объемную силу $F_s^{'}$, такую что

$$F_s' = \left(W(U_0)\right)^{-1} \cdot F_s . \qquad (10)$$

Тогда, на основе (2), (3), (9), и (10) получаем следующую неоднородную линейную систему уравнений для сдвига стационарного поля, U':

$$L_0 U' = F_s' . \qquad (11)$$

Далее, аналогично Хиллу, допустим, что нестационарная компонента объемной силы согласована с неустойчивым собственным колебанием:

$$F_u = f \cdot e^{-\lambda_1 t}, \qquad (12)$$

где f не зависит от времени t. В этом случае вынужденная, неоднородная форма задачи на собственные значения имеет вид:

$$L_1 u_1 - \lambda_1 u_1 = f_1, \qquad (13)$$

где $L_1 = L(U_1)$ и f_1 получается из f:

$$f_1 = \left(W(U_0)\right)^{-1} \cdot f . \qquad (14)$$

Тогда, представляя L_1, u_1 и λ_1 как

$$\begin{aligned} &L_1 = L_0 + \Delta L, \qquad u_1 = u_0 + \Delta u, \\ &\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda, \end{aligned} \qquad (15)$$

подставляя выражения (15) для L_1, u_1, и λ_1 в (13), используя (4) и пренебрегая нелинейными членами, получаем:

$$\Delta L u_0 + L_0 \Delta u - \Delta\lambda u_0 - \lambda_0 \Delta u = f_1 \qquad (16)$$

или

$$L_0 \Delta u - \lambda_0 \Delta u = f_1 - \Delta L u_0 + \Delta\lambda u_0. \qquad (17)$$

Далее, рассмотрим задачу на собственные значения, сопряженную (4):

$$L_0^* u_0^* - \overline{\lambda}_0 u_0^* = 0, \qquad (18)$$

где $\overline{\lambda}_0$ и λ_0 – комплексно-сопряженные величины.

Применяя к (17) альтернативу Фредгольма, получаем:

$$[u_0^*; (f_1 - \Delta L u_0 + \Delta\lambda u_0)] = 0, \qquad (19)$$

где [;] – операция скалярного произведения в рассматриваемом пространстве.

Из (19) получаем выражение для сдвига собственного числа:

$$\Delta\lambda = ([u_0^*; \Delta L u_0] - [u_0^*; f_1])/[u_0^*; u_0]. \qquad (20)$$

Отметим, что значение слагаемого $\Delta L u_0$ известно из определения ΔL (15) и выражения (11) для U'. Таким образом:

$$\Delta L u_0 = L(U_0 + U') \cdot u_0 - L(U_0) \cdot u_0. \qquad (21)$$

2. Численная реализация. Прежде всего, численно решается система уравнений Рейнольдса и получается стационарное решение U_0.

На основе стационарного решения U_0 вычисляется матрица S_0, являющаяся конечно-разностным представлением линейного дифференциального оператора L_0 в задаче на собственные значения (4):

$$(S_0 - \lambda_0 I) \cdot a_0 = 0, \qquad (22)$$

Далее, решается задача на собственные значения (22), определяется собственное число λ_0 и собственный вектор a_0.

Следующим этапом является решение сопряженной задачи на собственные значения:

$$(S_0^* - \overline{\lambda}_0 I) \cdot a_0^* = 0, \qquad (23)$$

где S_0^* и S_0 – эрмитово-сопряженные матрицы, а $\overline{\lambda}_0$ и λ_0 – комплексно-сопряженные числа.

Далее, решается система линейных алгебраических уравнений:

$$S_0 U' = G_s', \qquad (24)$$

где G_s' – конечно-разностное представление модифицированной стационарной силы F_s' (10).

Зная сдвиг стационарного поля U', можно получить новую матрицу S_1, основанную на вынужденном стационарном поле U_1:

$$U_1 = U_0 + U' \qquad (25)$$

Теперь, зная величину $\Delta S a_0 = S_1 a_0 - S_0 a_0$, можно определить сдвиг обобщенной частоты по формуле аналогичной (20):

$$\Delta\lambda = ([a_0^*; \Delta S a_0] - [a_0^*; g_1]) / [a_0^*; a_0],. \qquad (26)$$

где g_1 – конечно-разностное представление модифицированной амплитуды нестационарной силы f_1 (14).

Следует отметить, что операция скалярного произведения $[\,;\,]$ в комплексном векторном пространстве определяется следующим образом:

$$[x; y] = \Sigma \bar{x}_i y_i\,. \qquad (27)$$

3. Тестирование подхода. В качестве тестовой задачи было выбрано ламинарное течение вокруг круглого цилиндра при числе Рейнольдса 50 и числе Маха 0.2. Это течение с тем же числом Рейнольдса для несжимаемой жидкости было численно исследовано Хиллом [1] и экспериментально в работе Стриковски и Сринивасана [2]. В отсутствие внешних возмущений течение является нестационарным (критическое число Рейнольдса для цилиндра примерно равно 46). Вместе с тем, как показывают и эксперимент и численные исследования Хилла, малое воздействие на поток в определенных точках (помещенный в поток цилиндр меньшего диаметра в эксперименте и объемная сила в работе Хилла) делает его стационарным.

В данной работе численное решение стационарной системы уравнений движения сжимаемого газа осуществлялось с помощью противопоточной разностной схемы 3-го порядка, а элементы матрицы S_0 в задаче на собственные значения (22) определялись с помощью гибридной схемы, представляющей собой взвешенную сумму центральных разностей 4-го порядка и противопоточных разностей 3-го порядка

$$\Delta_H = \alpha\Delta_{3u} + (1-\alpha)\Delta_{4c},\ 0 \le \alpha \le 1 \qquad (28)$$

с различными значениями веса α. Использовалась расчетная сетка с размерностью 120×100.

Прежде всего, решалась задача устойчивости течения вокруг цилиндра без внешних сил. Для всех пяти рассмотренных разностных схем получалось единственное нестабильное собственное число. Зависимость вещественной и мнимой частей нестабильного собственного числа от разностной схемы приведена в **Таблице 1**. Видно, что эта зависимость является очень слабой. Кроме того, следует отметить, что эти значения хорошо согласуются со значениями, полученными Дж. Кроучем [3] для той же задачи на более мелкой сетке. ($\lambda_R = \mathrm{Re}(\lambda_0) = -1.2\cdot10^{-2}$, $\lambda_I = \mathrm{Im}(\lambda_0) = 0.732$). Таким образом, полученное в данной работе решение задачи на собственные значения для невозмущенного течения вокруг цилиндра можно считать вполне надежным.

α	$\lambda_R = \mathrm{Re}(\lambda_0)$	$\lambda_I = \mathrm{Im}(\lambda_0)$	$\Delta\lambda_R$	$\lvert\Delta\lambda_I\rvert$
0.0	$-1.12\cdot10^{-2}$	0.729	$4.22\cdot10^{-2}$	$8.01\cdot10^{-2}$
0.25	$-1.07\cdot10^{-2}$	0.729	$4.28\cdot10^{-2}$	$7.34\cdot10^{-2}$
0.5	$-1.02\cdot10^{-2}$	0.728	$4.25\cdot10^{-2}$	$7.26\cdot10^{-2}$
0.75	$-0.97\cdot10^{-2}$	0.728	$4.23\cdot10^{-2}$	$7.19\cdot10^{-2}$
1.0	$-0.92\cdot10^{-2}$	0.728	$4.21\cdot10^{-2}$	$7.12\cdot10^{-2}$

Таблица 1. Собственные числа для невынужденной задачи и их изменение при воздействии объемной силы в точке $(x, y) = (1.0, -1.11)$)

Затем с использованием тех же разностных схем решалась сопряженная задача на собственные значения (23). Поля сопряженных собственных решений, полученных для центрально-разностной схемы 4-го порядка и для противопоточной схемы 3-го порядка, представлены на рис. 1a и 1b. Видно, что, хотя противопоточная схема дает существенно более гладкое решение, поле сопряженного собственного решения для обеих схем содержит большое количество ”шумов” и является существенно немонотонным в радиальном направлении. К сожалению, объяснение этим свойствам сопряженного собственного решения пока не найдено, и, таким образом, нельзя отдать предпочтение той или иной разностной схеме.

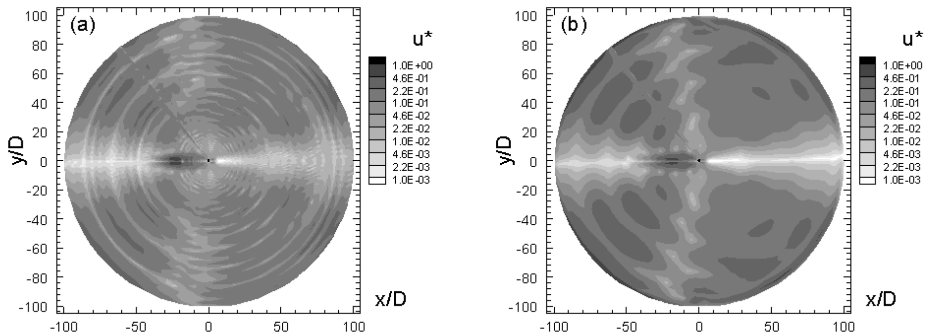

Рис. 1. Нормированное поле компоненты амплитуды собственного вектора сопряженного оператора, соответствующей продольной скорости, полученное с использованием центрально-разностной схемы 4-го порядка (a) и противопоточной разностной схемы 3-го порядка (b).

Следующим этапом являлось решение системы линейных алгебраических уравнений (24) для получения сдвига стационарного поля U', вызванного приложением объемной силы в некоторой точке потока. Аналогично подходу Хилла, мы рассматривали объемную силу в форме δ-функции (см. рис. 2, где сила приложена в точке $(x, y) = (1.0, -1.11)$). На рис. 3 приведены поля сдвига стационарного поля U' (то есть решения системы (24)) для продольной и поперечной компонент скорости Δu и Δv и возмущенное стационарное поле U_1 (25). Следует отметить, что вблизи точки приложения силы сдвиг стационарного

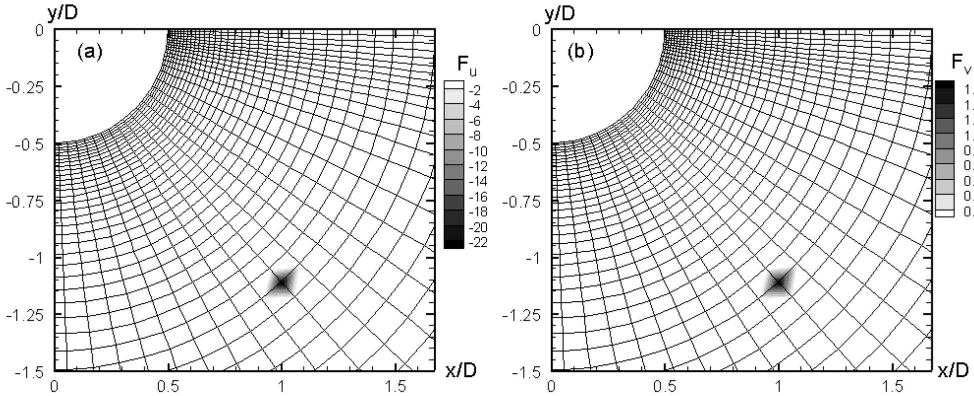

Рис. 2. Компоненты объемной силы, приложенной в точке $(x, y) = (1.0, -1.11)$.

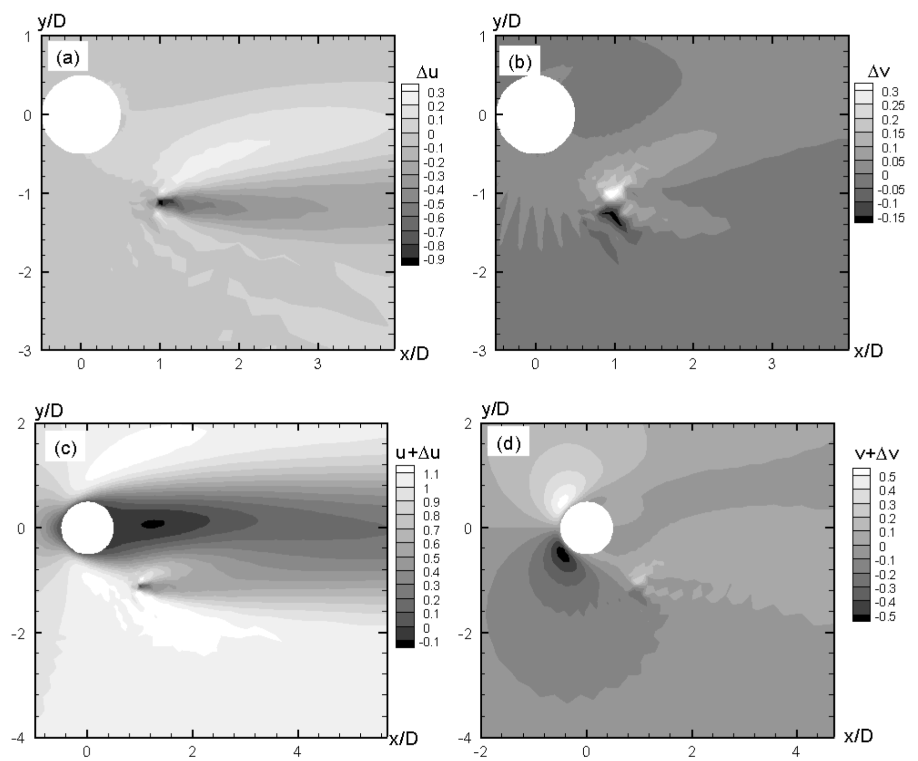

Рис. 3. Сдвиг стационарного поля (a, b) и вынужденное стационарное поле (c, d) для продольной и поперечной компонент скорости *u* и *v*.

поля U' имеет порядок 1 (как это и должно было бы быть, если бы вместо объемной силы в поток помещался цилиндр малого радиуса), что противоречит, хотя и локально, допущениям, принятым при получении выражения (9).

Далее, с помощью (26) определялся сдвиг нестабильного собственного числа, вызванный приложением силы (см. 4-й и 5-й столбцы **Таблицы 1** – для точки $(x, y) = (1.0, -1.11)$). Отметим, что, несмотря на видимые различия между полями сопряженных собственных решений, полученных с помощью разных схем (см. рис. 1a, b), величина сдвига оказалась практически нечувствительной к используемой схеме.

Для сравнения результатов данной работы с результатами расчетов Хилла и экспериментальными данными рассчитывался сдвиг критического числа Рейнольдса, вызванный приложением силы, получаемый из величины сдвига вещественной части нестабильного собственного числа по формуле из работы Хилла:

$$\Delta Re_c = Re_c \frac{\Delta\lambda_R / A}{1 - \Delta\lambda_R / A}, \quad A = 0.2\,. \tag{29}$$

Эта формула основана на линейной связи между числом Рейнольдса Re и величиной $Re \cdot \lambda_R$ для нестабильного собственного числа, а также на допущении, что сдвиг вещественной части собственного числа не зависит от числа Рейнольдса.

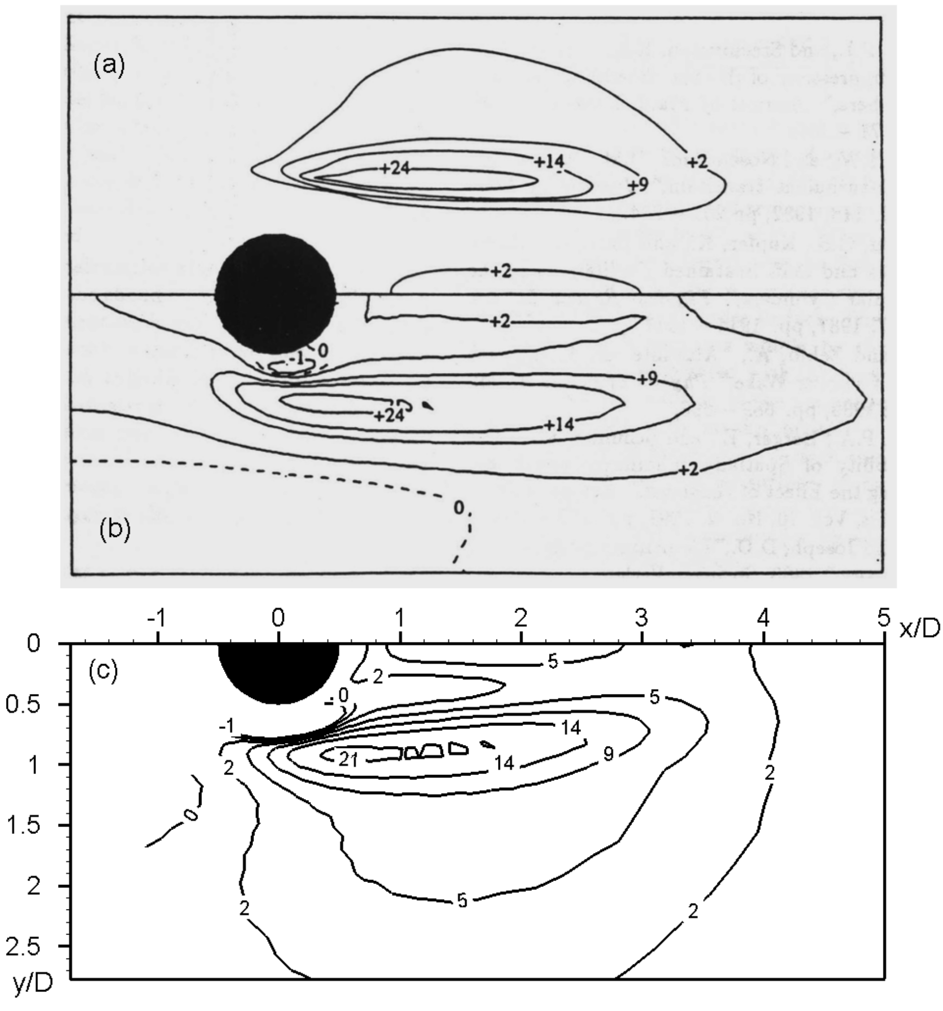

Рис. 4. Сдвиг критического числа Рейнольдса $\Delta Re_c(x, y)$, вызванный помещением в точке (x, y) цилиндра малого радиуса в эксперименте (a) и приложением в точке (x, y) объемной силы в расчетах Хилла (b) и в данной работе (c).

На Рис. 4 поля сдвига критического числа Рейнольдса, расчитанного по формуле (29) сравниваются с результатами Хилла и с экспериментом. Качественно, все результаты хорошо согласуются, но максимальная величина сдвига в данной работе оказалась несколько заниженной, кроме того, величина сдвига по мере удаления от основного цилиндра спадает слишком медленно. Эти различия могут быть объяснены численными неточностями, в частности, использованием недостаточно мелкой сетки.

Выводы. В целом результаты тестирования вышеописанного подхода можно признать вполне удовлетворительными. Таким образом, является целесообразным дальнейшее исследование возможностей подхода, в частности, применительно к существенно сжимаемым турбулентным течениям.

Литература

1. **Hill D.C**. A theoretical approach for analyzing the restabilization of wakes. // AIAA Paper, 1992, AIAA-92-0067.

2. **Strykowski, P.J., and Sreenivasan, K.R.** On the Formation and Suppression of Vortex "Shedding" at Low Reynolds Numbers // Journal of Fluid Mechanics, 1990, Vol. 218, pp. 71 – 107.

3. **Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D.** Predicting the onset of flow unsteadiness based on global-stability theory. // JCP, accepted for publication in 2005.